**MATRICES Y TRANSFORMACIONES LINEALES 1**

En matemáticas, tenemos dos maneras principales de usar las matrices.

Una es para representar sistemas de ecuaciones lineales, registrando sus coeficientes en una matriz. Aquí la matriz es simplemente una tabla de números, y la idea es resolver esa tabla en vez del sistema de ecuaciones en sí, para evitar escribir tantas incógnitas y signos. Esto fue lo que vimos en el capítulo anterior.

La segunda manera, que vamos a ver en este video, es más interesante. Aquí, las matrices representan funciones, que toman un vector y lo transforman en otro vector. Pero esta no es cualquier transformación, sino una transformación lineal. Y eso es lo que vamos a ver en este video.

---

**Vectores**

Primero repasemos qué son los vectores. Si quieres saltarte este repaso, anda directo al minuto X:XX.

Podemos definir un vector como una lista de números llamados “componentes”, la cual se puede representar en un sistema cartesiano como una flecha.

Así, diremos que un vector con dos componentes x e y, que pertenecen al conjunto de los reales, R, pertenece a RxR, o R^2, y lo representamos en un plano cartesiano con dos ejes X e Y, como una flecha que parte del origen y termina en el punto (x, y).

Un vector de tres componentes pertenecería a RxRxR, o R³, y se representaría en un espacio cartesiano con tres ejes X, Y y Z.

En general, decimos que un vector con n componentes pertenece a R^n.

---

Ahora veamos operaciones con vectores.

Dos vectores u y v son iguales si cada par de componentes es igual: primero con primero, segundo con segundo, y así.

---

Dos vectores u y v del mismo largo se pueden sumar y formar un nuevo vector u+v. Para eso se debe sumar cada par de componentes de u y v: primero con primero, segundo con segundo, y así; la n-ésima suma es la n-ésima componente del nuevo vector.

Geométricamente, sumar dos vectores componente por componente se puede interpretar como tomar el vector v y deslizarlo hasta que su punto de origen coincida con la punta del vector u, y la suma sería un nuevo vector que dibujas desde el origen de u hasta la punta de v. Esto se conoce como “método del triángulo”, pues estos tres vectores, u, v y u+v, forman un triángulo. Otro método es formar un paralelogramo con los vectores u y v, dibujando rectas paralelas a estos vectores que crucen las puntas del vector opuesto. El vector suma va desde el origen hasta el otro extremo. Este es el "método del paralelogramo".

---

Un vector u se puede multiplicar por un escalar lambda, dando como resultado un nuevo vector lambda\*u donde cada uno de sus componentes es igual al original, pero multiplicado por lambda.

Geométricamente, hacer esto es escalar el vector u por el escalar lambda. Si lambda es mayor que 1, el vector se estira y queda más grande. Si está entre 0 y 1, se achica. Si es negativo, se invierte, entre otras cosas.

---

También se puede multiplicar vectores entre sí. Tenemos el producto punto o escalar, que produce un escalar, y el producto cruz o vectorial, que produce otro vector. Aquí veremos solo el producto punto, que consiste en multiplicar componente por componente dos vectores de igual largo y sumar todos los productos, obteniendo un número real.

---

**Dos detalles importantes**

Antes de partir hay que decir que, en el álgebra lineal, un vector en realidad es más abstracto y es básicamente \*todo\* lo que se pueda sumar y escalar para formar otros vectores, siguiendo ciertas propiedades. Esto abarca no solo vectores en R^n, sino también polinomios, funciones y otras cosas. A estos conjuntos abstractos de vectores les llamamos "espacios vectoriales". Pero para simplificar, aquí vamos a enfocarnos solo en vectores en R^n.

Por otra parte, hasta ahora llevo escribiendo los vectores como listas verticales, y no como una lista horizontal separada por comas. Así parecen matrices de una sola columna, ¡y de hecho lo son! Esta forma es más conveniente, por razones que iremos viendo más adelante.

---

**Ecuaciones vectoriales**

Tomemos un sistema de ecuaciones lineales, como por ejemplo 2x - y = 4, x + y = -1.

Como consiste de varias igualdades, el sistema se puede reescribir como el vector (2x - y, x + y) igual al vector (0, 3), gracias a la definición de igualdad de vectores. Así, nos queda una “ecuación vectorial”.

Ahora el vector (2x - y, x + y) se puede separar en una suma de dos vectores: uno que tenga las x, y otro que tenga las y. Así, puedes separarlo en (2x, x) + (-y, y). En el primero puedes factorizar las x y en el segundo las y, quedando así x por (2, 1), más y por (-1, 1), igual a (4, -1).

Al lado izquierdo queda una "combinación lineal de vectores", porque tienes dos vectores, (2, 1) y (-1, 1), escalados por x e y, y luego sumados entre sí. Lo que esta ecuación vectorial nos está preguntando es: ¿cuánto del vector (2, 1) y cuánto del vector (-1, 1) tenemos que agregar para poder obtener (4, -1)? Esto lo podemos responder con ayuda de GeoGebra.

Primero grafico los vectores a = (2, 1) y b = (-1, 1). Ahora queremos graficar un vector que sea una combinación lineal de estos vectores, es decir, x por (2, 1) más y por (-1, 1). Para eso, primero creamos dos deslizadores x e y. Como en GeoGebra no les podemos llamar directamente \*x e y\*, les voy a poner "x sub cero" e "y sub cero". Ahora voy a crear los vectores u = x\*a, y v = y\*b. Si cambio los valores de x e y, estos dos vectores cambian. Por último, voy a crear el vector s = u + v.

Para ayudarnos visualmente, voy a crear un paralelogramo, hecho a partir de los vectores x\*a e y\*b. También voy a desactivar la cuadrícula y reemplazarla por una nueva, hecha a partir de los vectores a y b. Voy a arreglar un poco los colores, los grosores y los nombres, y ya está. Ahora podemos jugar con este proyecto. Si quieres experimentar con esto, busca el enlace en la descripción de este video.

Esta cuadrícula indica los múltiplos enteros de los vectores a y b. Entonces, si quiero llegar a este punto (2, 4), solo tengo que contar 1, 2 pasos en la dirección de a, y 1, 2 pasos en la dirección de b. O sea, el vector (2, 4) es igual a 2 veces el vector (2, 1), más 2 veces el vector (-1, 1). Entonces, x = 2, e y = 2. Y si quiero llegar al punto (7, -1), tengo que contar 1, 2 pasos en la dirección de a, y 1, 2, 3 pasos en la dirección \*contraria\* a b. O sea, el vector (7, -1) es 2 veces el vector (2, 1) \*menos\* 3 veces el vector (-1, 1). Entonces x = 2, e y = -3.

Ahora, en la ecuación de antes, buscamos que esta combinación lineal sea igual al vector (4, -1). Así que voy a graficar este vector en el plano. Para llegar a este vector necesito avanzar 1 paso en la dirección de a, y 2 pasos en la dirección \*contraria\* a b. O sea, el vector (4, -1) es igual a 1 \* (2, 1) - 2 \* (-1, 1).

Por ende, la solución a esta ecuación es x = 1, e y = -2.

---

**Transformaciones lineales**

Volvamos a la ecuación vectorial de antes, pero ahora ignoremos el vector (4, -1) y analicemos solo el lado izquierdo: la combinación lineal de los vectores (2, 1) y (-1, 1), donde los coeficientes son x e y.

Cada par de valores que ingresemos para x e y, va a producir un vector en este plano, el vector x \* (2, 1) + y \* (-1, 1). Podríamos decir que hay una \*función\* que recibe dos entradas, x e y, y produce como salida este vector.

Estos valores x e y se pueden representar en otro plano mediante un punto, pero es mejor representarlo con un vector, porque ahora podemos decir que la función, en vez de recibir dos entradas x e y, recibe \*un vector\* (x, y) y produce como salida \*otro vector\* x \* (2, 1) + y \* (-1, 1). O si lo juntas todo en uno, el vector (2x - y, x + y). Ahora es una función que toma un vector y lo mapea a otro vector. A estas funciones, que toman un objeto y lo transforman en otro similar, las solemos llamar “transformaciones”, y esta la podemos denotar con una T mayúscula. Así que decimos que T del vector (x, y) es igual a (2x - y, x + y).

Esta transformación en particular es especial: fíjate que cada una de las componentes del vector de salida, 2x – y y x + y, es una combinación lineal de las componentes del vector de entrada, x e y. Y si expandes este vector, el resultado es una combinación lineal de los vectores (2, 1) y (-1, 1), donde los coeficientes son las componentes del vector de entrada, x e y. En ambos casos hay algo \*lineal\*. Por ende, esta no es cualquier transformación: es una \*transformación lineal\*. Estas transformaciones tienen dos propiedades importantes: uno, si sumas dos vectores y los transformas, es lo mismo que si primero los transformas por separado y luego sumas los resultados. Es decir, \*preservan la adición\*. La segunda propiedad, es que si escalas un vector y luego lo transformas, es lo mismo que si primero lo transformas y luego multiplicas el resultado por ese escalar. Es decir, \*preservan el producto por escalar". Estas son las "propiedades de linealidad", y en general, decimos que todo lo que tenga estas propiedades es \*lineal\*.

---

**Matrices y transformaciones lineales**

En el capítulo anterior representamos sistemas de ecuaciones \*lineales\* a través de matrices, las cuales coleccionaban todos sus coeficientes y sus constantes de manera ordenada.

Podemos hacer lo mismo con nuestra transformación \*lineal\*: coleccionar todos los coeficientes del vector salida en una matriz, en este caso una de coeficientes (2 -1 @ 1 1).

Decimos que esta matriz representa nuestra transformación lineal.

Entonces, podemos decir que aplicar esta matriz sobre un vector (x, y) lo transforma en el vector (2x – y, x + y).

En general, una transformación lineal que mapee un vector (x, y) a un vector (ax + by, cx + dy) se puede representar mediante esta matriz (a b c d).

---

Volviendo al sistema de ecuaciones lineales que teníamos antes, 2x - y = 4, y x + y = -1, por una parte podemos representarlo con una matriz que recopila sus coeficientes y sus términos independientes, separados con una línea vertical. Y por otra parte, lo podemos convertir en una ecuación vectorial, y luego el lado izquierdo se puede reescribir como la matriz (2 -1 @ 1 1) aplicada sobre el vector (x, y). Todo esto es igual al vector (4, -1). El vector (x, y) que es transformado al vector (4, -1), sería de acuerdo a lo que vimos antes el vector (1, -2).

Pero si no tuviéramos herramientas gráficas para resolver esta ecuación, ¿cómo la resolveríamos algebraicamente? Una forma sería tomar esta matriz de la izquierda y combinarla con el vector (4, -1) para formar una sola matriz. Esta fusión se conoce como "matriz ampliada", y es justo la matriz que representa a todo el sistema, por lo que podría resolverse con la eliminación de Gauss-Jordan, como en el capítulo anterior.

En general, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de la forma ax + by = k1, y cx + dy = k2, se puede representar como "la matriz (a b @ c d) aplicada sobre el vector (x, y), igual al vector (k1, k2)". Si a la matriz la denotamos A mayúscula, al vector variable (x, y) lo denotamos x vector y al vector constante (k1, k2) le ponemos b vector, entonces todo el sistema se puede expresar como Ax = b. Y para resolverlo podemos fusionar la matriz A con el vector constante b, formando la matriz ampliada (A|b) que se puede resolver con Gauss-Jordan.

Por supuesto, esta no es la única manera de resolver el sistema, porque todo este tópico de los vectores y las transformaciones lineales al final nos va a dar más herramientas con las que trabajar. Pero eso lo dejo para otro video.

---

Y bueno, todavía faltan un montón de cosas más por explicar, pero decidí dejarlas en una segunda parte de este capítulo. En el próximo video veremos más detalles de cómo funcionan las transformaciones lineales. Nos vemos.